

"المقارنة بين بعض دوال طريقة M الحصينة في التوزيع اللوجستي  
في حالة أنموذج الانحدار الخطي المتعدد"

م.م. احمد ذياب احمد  
كلية الادارة والاقتصاد  
جامعة بغداد

**Abstract:**

This research discusses to compares between some of functions the M- robust method in the logistic distribution in state the multiply linear regression model by using the simulation on the size of samples different and we give theoretical M - Estimators.

**1- المقدمة:**

تعتبر طريقة M من أهم الطرائق الحصينة وذات كفاءة عالية مقارنة مع طريقة المربعات الصغرى عندما يتوزع الخطأ<sup>[2]</sup>  $N(0, \sigma^2)$  وقد أطلق Huber في عام 1972 اسم مقدر M على صنف من المقدرات الحصينة وإن تطبيق هذه الطريقة في الدراسات المتعلقة بعلوم الحياة والعلوم الزراعية والطبية حيث يستخدم التوزيع السوقي (اللوجستي) في مثل هذا النوع من الدراسات<sup>[3]</sup> يكون بسبب حدوث خلل في إحدى فرضيات التوزيع الطبيعي أو تلوث البيانات بقيم شاذة.

وعلى فرض لدينا معادلة الانحدار الآتية

$$\gamma = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \dots \dots \dots (1)$$

حيث إن

$\gamma$ : المتغير المعتمد

$x_1, x_2$ : المتغيرات المستقلة

$b_0, b_1, b_2$ : معاملات معادلة الانحدار

إن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع هي

$$f(\chi) = \frac{1}{\beta} \left[ e^{-\left(\frac{\chi-\alpha}{\beta}\right)} \right] \left[ 1 + e^{-\left(\frac{\chi-\alpha}{\beta}\right)} \right]^{-2} \dots \dots \dots (2)$$

$$-\infty < \chi < \infty$$

حيث إن  $\alpha, \beta$  تمثلان معلمتي التوزيع

$$\beta > 0, \quad -\infty < \alpha < \infty$$

أما الدالة التوزيعية لهذا التوزيع هي

$$F(\chi) = \left[ 1 + e^{-\left(\frac{\chi-\alpha}{\beta}\right)} \right]^{-1} \dots \dots \dots (3)$$

**2- طريقة M<sup>[1]</sup>**

تعتبر طريقة M من الطرائق الحصينة الواسعة الانتشار وذات الكفاءة العالية والمطلوب من هذه الطريقة هو تصغير المقدار

$$\sum_{i=1}^r \rho(Y_i - \chi'_i B) \dots\dots\dots (4)$$

حيث إن  $\rho$  دالة محدبة ومتماثلة ولتحقيق خاصية Scale Invariant تكون الصيغة (4) كلاتي

$$\sum_{i=1}^r \rho\left(\frac{Y_i - \chi'_i B}{\hat{\sigma}}\right) \dots\dots\dots (5)$$

وبأخذ المشتقة للدالة  $\rho$  بالنسبة إلى متجه المعلمات B ومساواتها إلى الصفر نحصل على

$$\sum_{i=1}^r \Psi\left[\frac{(Y_i - \chi'_i B)}{\hat{\sigma}}\right] \chi_{sj} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$j=1, 2, \dots\dots\dots k$$

وبإعادة كتابة المعادلة (6) كلاتي

$$\sum_{i=1}^r w_i \chi_{ij} (Y_i - \chi'_i B) / \hat{\sigma} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

حيث إن  $(w_i)$  دالة الوزن وتحسب كلاتي

$$w_i = \frac{\Psi\left(\frac{(Y_i - \chi'_i B_h)}{\hat{\sigma}}\right)}{\left[\frac{(Y_i - \chi'_i B_h)}{\hat{\sigma}}\right]} \dots\dots\dots (8)$$

$B_h$  : متجه المعلمات الابتدائية

$\hat{\sigma}$  : تمثل معلمة القياس وتقدر من الصيغة الآتية

$$\hat{\sigma} = 1.483[\text{Median}(u_i) - \text{Median}(u_i)] \dots\dots\dots (9)$$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى يمكن حل المعادلة (7) كلاتي

$$\hat{B} = (\chi'w\chi)^{-1} \chi'wy \dots\dots\dots (10)$$

وان

W: مصفوفة الأوزان القطرية عناصر القطر فيها الأوزان  $(w_i)$

وبما إن حصانة المقدر تعتمد على الدالة  $\rho$  فان هناك صيغ عديدة لهذه الدالة منها

1- دالة Huber [4]

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{2} \\ c|u| - \frac{c^2}{2} \end{cases}$$

$$\Psi(u) = \begin{cases} u & |u| \leq c \\ c \operatorname{sign}(u) & |u| > c \end{cases}$$

وان  $c=1.345$ 

2- دالة ثنائية الأس Double exponential

$$\Psi(u) = \begin{cases} -1 & u < 0 \\ 1 & u > 0 \end{cases}$$

3- دالة اندراوس Andrews

$$\Psi(u) = \begin{cases} \sin\left(\frac{u}{h}\right) & |u| \leq h\pi \\ 0 & |u| > h\pi \end{cases}$$

وان  $h=1.5$ 

4- دالة رمزي Ramsy

$$\Psi(u) = \begin{cases} u \exp\left(\frac{-a}{|u|}\right) & |u| \leq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

وان  $a=0.3$ **3- المحاكاة:**

وللمقارنة بين صيغ الدالة  $m$  في حالة التوزيع اللوجستي تم تكرار التجربة 1000 مرة وإحجام عينات مختلفة (10, 50, 100) وبافتراض قيم معاملات التوزيع  $\alpha = 1, 3, 5$  ,  $\beta = 1, 3, 5$  والتي تستخدم لتوليد عينة عشوائية وفق الصيغة

$$\chi = -\beta \log\left(\frac{1}{u} - 1\right) + \alpha$$

كما انه تم اخذ قيم معاملات معادلة الانحدار  $b_0 = 0.5$  ,  $b_1 = 0.9$  ,  $b_2 = 0.5$

جدول (1) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 1, \beta = 1$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.10882	0.00985	0.08057	0.00174
	$b_1$	0.03729	0.00197	0.04203	0.00125
	$b_2$	0.00207	0.00062	0.00247	0.00177

n=50	$b_0$	0.00655	0.00128	0.00396	0.00046
	$b_1$	0.00231	0.0001	0.00107	0.0001
	$b_2$	0.00018	0.0004	0.00025	0.00069
n=100	$b_0$	0.00009	0.00062	0.01146	0.0008
	$b_1$	0.00273	0.0072	0.01991	0.00438
	$b_2$	0.00097	0.00166	0.00201	0.00153

جدول (2) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 3, \beta = 3$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.07241	0.00664	0.07312	0.01579
	$b_1$	0.04965	0.004	0.05859	0.00509
	$b_2$	0.00262	0.00044	0.00303	0.00568
n=50	$b_0$	0.02864	0.01026	0.02039	0.01404
	$b_1$	0.00416	0.00075	0.00282	0.00119
	$b_2$	0.00009	0.00017	0.00011	0.00015
n=100	$b_0$	0.00487	0.00067	0.00082	0.0002
	$b_1$	0.00008	0.01662	0.00017	0.01826
	$b_2$	0.00029	0.00035	0.00021	0.00048

جدول (3) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 5, \beta = 5$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.01092	0.0105	0.00001	0.00755
	$b_1$	0.00285	0.00909	0.03248	0.04074
	$b_2$	0.00167	0.00246	0.0037	0.00652
n=50	$b_0$	0.18361	0.01147	0.0836	0.00089
	$b_1$	0.03707	0.00059	0.02204	0.00228
	$b_2$	0.00003	0.00017	0.00001	0.00089

n=100	$b_0$	0.08425	0.0017	0.03588	0.01215
	$b_1$	0.10968	0.00578	0.07611	0.01452
	$b_2$	0.00596	0.00063	0.00469	0.0008

جدول (4) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 1, \beta = 3$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.30055	0.01267	0.17022	0.01719
	$b_1$	0.10871	0.00037	0.08403	0.00075
	$b_2$	0.00399	0.00111	0.0037	0.0005
n=50	$b_0$	0.00075	0.00144	0.00233	0.00164
	$b_1$	0.00022	0.00032	0.00005	0.0014
	$b_2$	0.00042	0.00005	0.00057	0.00005
n=100	$b_0$	0.00366	0.00561	0.03664	0.02887
	$b_1$	0.03157	0.06249	0.0622	0.05689
	$b_2$	0.00298	0.00597	0.00402	0.00861

جدول (5) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 1, \beta = 5$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.24088	0.00075	0.22139	0.00006
	$b_1$	0.1298	0.00109	0.14099	0.00015
	$b_2$	0.00484	0.00027	0.0054	0.00028
n=50	$b_0$	0.00475	0.00408	0.01188	0.00613
	$b_1$	0.00001	0.00004	0.00307	0.00035

	$b_2$	0.00054	0.00022	0.00101	0.00026
n=100	$b_0$	0.01117	0.01102	0.08496	0.02446
	$b_1$	0.07501	0.09112	0.14462	0.0652
	$b_2$	0.00524	0.0074	0.00732	0.00917

جدول (6) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 3, \beta = 5$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.00312	0.00348	0.00401	0.00849
	$b_1$	0.003	0.01974	0.0459	0.00256
	$b_2$	0.00174	0.0038	0.00452	0.00056
n=50	$b_0$	0.02859	0.01265	0.04896	0.05809
	$b_1$	0.01172	0.00809	0.02034	0.02952
	$b_2$	0.00049	0.00023	0.0005	0.0007
n=100	$b_0$	0.15223	0.00634	0.08222	0.03071
	$b_1$	0.15315	0.00452	0.11252	0.01136
	$b_2$	0.00737	0.00041	0.00623	0.00061

جدول (7) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 5, \beta = 1$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.05526	0.0142	0.05136	0.03178
	$b_1$	0.03716	0.01188	0.03757	0.02097
	$b_2$	0.00198	0.00101	0.00203	0.00139
n=50	$b_0$	0.01777	0.00247	0.04683	0.00271

	$b_1$	0.00448	0.00014	0.00441	0.00001
	$b_2$	0.00008	0.00062	0.00008	0.00033
n=100	$b_0$	0.04634	0.01858	0.0475	0.03404
	$b_1$	0.00308	0.00009	0.00299	0.0036
	$b_2$	0.00015	0.00031	0.00016	0.00008

جدول (8) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 5, \beta = 3$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.01498	0.01048	0.00501	0.00232
	$b_1$	0.00168	0.0023	0.00035	0.01018
	$b_2$	0.00025	0.00011	0.00065	0.0051
n=50	$b_0$	0.28026	0.0016	0.20374	0.00014
	$b_1$	0.08285	0.00001	0.06337	0.00093
	$b_2$	0.00039	0.00037	0.00026	0.00057
n=100	$b_0$	0.00848	0.00023	0.00221	0.00012
	$b_1$	0.01918	0.05995	0.02823	0.0399
	$b_2$	0.00234	0.00552	0.00273	0.00404

جدول (9) إيجاد MSE للمعاملات

حجم العينة	المعاملات	$\alpha = 3, \beta = 1$			
		Huber	Exponential	Andrews	Ramsy
n=10	$b_0$	0.00123	0.00001	0.00693	0.00002
	$b_1$	0.00229	0.00011	0.01024	0.00018
	$b_2$	0.00071	0.0004	0.00125	0.00021

n=50	$b_0$	0.01211	0.00404	0.01479	0.00396
	$b_1$	0.00169	0.00008	0.00297	0.00005
	$b_2$	0.00019	0.00034	0.00013	0.00035
n=100	$b_0$	0.00241	0.00226	0.00546	0.00005
	$b_1$	0.00155	0.00351	0.00305	0.00335
	$b_2$	0.00016	0.00003	0.00011	0.00001

**4- الاستنتاجات:**

1- في حالة  $\alpha = 1, \beta = 1$

عندما يكون حجم العينة ( $n=10$ ) تكون دالة Double Exponential أفضل من دالة Ramsy ودالة Huber ودالة Andrews في تقدير أنموذج الانحدار الخطي المتعدد، أما عندما تكون ( $n=50, 100$ ) فان دالة Huber تكون أفضل من الدوال الأخرى.

2- في حالة  $\alpha = 3, \beta = 3$

عندما يكون حجم العينة ( $n=10$ ) تكون دالة Double Exponential أفضل من الدوال الأخرى في تقدير أنموذج الانحدار الخطي المتعدد أما عندما تكون ( $n=50$ ) فان دالة Huber تكون أفضل من الدوال الأخرى وعندما تصبح ( $n=100$ ) تكون دالة Andrews هي الأفضل.

3- في حالة  $\alpha = 5, \beta = 5$

عندما يكون حجم العينة ( $n=10$ ) تكون دالة Huber أفضل من الدوال الأخرى في تقدير أنموذج الانحدار الخطي المتعدد أما عندما تكون ( $n=50$ ) فان دالة Andrews تكون أفضل من الدوال الأخرى وعندما تصبح ( $n=100$ ) تكون دالة Ramsy هي الأفضل.

4- في حالة  $\alpha = 1, \beta = 3$

عندما ( $n=10, 50$ ) فان دالة Ramsy أفضل من الدوال الأخرى وعند  $n=100$  فان دالة Huber هي الأفضل .

5- في حالة  $\alpha = 1, \beta = 5$

عندما ( $n=10, 50$ ) فان دالة Double Exponential أفضل من الدوال الأخرى وعند  $n=100$  فان دالة Huber هي الأفضل .

6- في حالة  $\alpha = 3, \beta = 5$

عندما ( $n=10$ ) فان دالة Ramsy أفضل من الدوال الأخرى وعند ( $n=50, 100$ ) فان دالة Double Exponential تكون أفضل .

7- في حالة  $\alpha = 5, \beta = 1$

عندما ( $n=10$ ) فان دالة Double Exponential أفضل من الدوال الأخرى وعند  $n=50$  فان دالة Andrews تكون أفضل وعند  $n=100$  فان دالة Ramsy هي الأفضل .

8- في حالة  $\alpha = 5, \beta = 3$

عندما ( $n=10$ ) فان دالة Double Exponential أفضل من الدوال الأخرى وعند  $n=50$  فان دالة Andrews تكون أفضل وعند  $n=100$  فان دالة Huber هي الأفضل .

9- في حالة  $\alpha = 3, \beta = 1$



عندما (  $n=10,100$  ) فان دالة Ramsy أفضل من الدوال الأخرى وعند  $n=50$  فان دالة Andrews تكون أفضل .

#### 5- التوصيات:

- 1- نوصي باستخدام طريقة M الحصينة في حالة التوزيع اللوجستي.
- 2- استخدام دالة Huber عند تطبيق طريقة M الحصينة عندما يكون حجم العينة كبير.
- 3- استخدام دالة Double exponential عند تطبيق طريقة M الحصينة عندما يكون حجم العينة صغير.

#### 6- المصادر:

- 1- العزاوي، احمد ذياب (2005) "المقارنة بين بعض طرائق تقدير أنموذج انحدار اللوجستك والطرائق الحصينة للتجارب الحياتية ذات الاستجابة الثنائية باستخدام أسلوب المحاكاة" رسالة ماجستير، كليتي الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.
- 2- عبد الجبار، انعام عبد الوهاب ( 2002 ) "دراسة مقارنة مقدرات طريقتي R,M الحصينتين مع مقدرات المربعات الصغرى" المجلة العراقية للعلوم الاحصائية، العدد 4، المجلد 2 .
- 3- هرmez، أمي حنا (1990) "الإحصاء الرياضي" دار الكتب للطباعة والنشر، الموصل.
- 4-Huber, P.J. (1981) "Robust Statistics" New York, John Wiley & Sons.