Diala , Jour , Volume , 31 , 2008

أيجاد الحل الأمثل للبرمجة الخطية بطرق التحليل العددي

مدرس مساعد أرشد أدهم أحمد

قسم الحاسبات/كلية التربية

الخلاصة

تهدف الدراسة الى أيجاد حل أمثل لمشاكل البرمجة الخطية عوضا عن حلها بطريقة السمبلكس ألا وهي طرق التحليل العددي وذلك لأنها مطولة في أيجاد الحلول الأساسية الأولية والتكرارية والعمليات الحسابية حتى الوصول للحل الأمثل ، وان هذه الطرق تحل فقط التي فيها عدد القيود تساوي عدد المتغيرات وهي أسهل وأسرع من طريقة السمبلكس ولاتحتاج الى متغيرات أضافية (وهمية)، كذلك ندرت البرامج الجاهزة في مادة البحوث العمليات وبالأخص مشاكل البرمجة الخطية، بينما التحليل العددي يوجد فيه البرامج الجاهزة والسريعة والطرق العددية الحسابية البسيطة للوصول الى الحل الأمثل ومن هذه الطرق للحلول العددية لمنظومات المعادلات الخطية هي (طريقة الحذف لكاوس وطريقة كاوس– جوردن) كما يتضمن البحث عدد من الأستنتاجات.

To Find the Optimal Solution for linear Programming by Numerical Solution Methods

Abstract

The aim of the study is to find the optimal solution for the linear programming instead of the solution by simplex method and solve by the numerical analysis methods.

Because that longer to find the fundamental primary solution and iterative and calculation ways to find the optimal solution, this methods solve only have number condition equal number variables and its easy and fast from the simplex method and it did not wont to slake variables, in this way we know the complete program in operation research and especially in linear programming, for numerical analysis is found the complete and fast programs and also the ways for simple numerical calculation to find optimal solution, from this way to numerical solution

of linear system is (Gaussian Elimination method and Gauss-Jordan method) also the research include many result.

المقدمة (1)

تتألف المشكلة الرياضية النموذجية من تابع واحد يمثل أما الربح المراد زيادته الى الحد الأعلى، أو يمثل الكلفة المراد أنقاصها الى الحد الأدنى، هذا بالأضافة لمجموعة من القيود التي تشكل حدا لمتغيرات القرار.

ففي حالة البرمجة الخطية، يكون كل من التابع والقيود عبارة عن توابع خطية لمتغيرات القرار.

تعد البرمجة الخطية نموذجا واسع الأستخدام يمكنة حل مشاكل صنع القرار ذات المتغيرات العديدة هذا، وبالامكان حصر قيم القرارات الممكنة بواسطة مجموعة القيود الموصفة رياضيا والتي تقارن بأستخدام التابع لمتغيرات القرار.

عندما يكون للمشكلة متغيرين فقط يمكن استخدام طريقة بيانية في عملية الحل. فعليا، تكون معظم مشاكل البرمجة الخطية بسيطة ويمكن حلها بيانيا. الا أن المشاكل الأكبر ذات القيود العديدة تستهلك وقتا كبيرا للحل.

وأن أتخاذ اي قرار على مرحلتين رئيسيتين الأولى هي صياغة المسألة وفق علاقات رياضية يطلق عليها النموذج الرياضي والثانية هي حل النموذج الرياضي والبحث عن أفضل الحلول وتطبيقها على المشكلة الحقيقة.

الصيغة العامة للبرمجة الخطية (3,2)

The General Linear Programming "L.P" Problem

يمكن وضع صياغة ثابتة للبرنامج الخطي تظمن دالة الهدف Z والقيود التي من الممكن ان تأخذ $\leq , = , \geq$ والشيء المتعارف عليه هو ان جميع المتغيرات x_j المطلوب اتخاذ القرار بشأنها، تكون غير سالبة لأنها متغيرات تصل بالواقع لذلك تصبح النتائج السالبة كميات غير حقيقية.

Maximize or Minimize $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ دالة الهدف

Subject to:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq , = , \geq) b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq , = , \geq) b_2 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq , = , \geq) b_m \\
&x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

القيود

حيث a_{ij}, b_i, c_j ثوابت تحدد من سياق المسألة $i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n$

x_j : المتغيرات المطلوب أتخاذ القرار بشأنها.

ونلاحظ من الصياغة ان أشارة المتغيرات x_j مقيدة بشرط عدم السالبية non-Negative وهذا الشرط ضروري لتطوير طريقة حل نموذج الـ Lp.

وبصورة عامة اذا كانت b_i تمثل كمية الموارد المحدودة المطلوب برمجتها لتحقيق هدف معين، فأن a_{ij} تمثل كمية الموارد المحدودة من النوع i والمطلوب تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط او الفعالية j، وان قيمة هذا لكل وحدة يعبر عنها c_j "حيث c_j تمثل الربح او الكلفة".

ملاحظة: يمكن وضع الصيغة العامة بالشكل المختصر الأتي بأستخدام أشارة المجموع أولا وبأستخدام المصفوفات والمتجهات ثانيا:

Max or Min $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ دالة الهدف

sub to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,(\leq \,,\, = \,,\, \geq) b_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

القيود

Or

Max or Min $\quad Z = CX$

s.to:

$$AX(\leq \,,\, = \,,\, \geq) B$$

$$X \geq 0$$

حيث: C تمثل متجه صفي عدد عناصره n ، X تمثل متجه عمودي عدد عناصره n

A مصفوفة من مرتبة m×n ، B متجه عمودي عدد عناصره m

ان الخطوط الرئيسية التالية بعد صياغة نموذج البرمجة الخطية، هي تحليل النموذج رياضيا، ولكن نظرا لاختلاف صيغ البرمجة الخطية من الضروري تعديل هذه الصيغ لتحديد نموذج حل مناسب.

توجد صيغتان مناسبة لهذا الغرض هي الشكل او الصيغة القانونية Canonical form والصيغة القياسية او المعمارية Standard form.

وفيما يلي تفصيلات كل منهما:

أولآ: الصيغة القانونية Canonical form

بالامكان وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية المعرفة أعلاه في الشكل الأتي والذي نعبر عنه بالشكل القانوني:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

وخصائص هذه الصيغة هي:

1. جميع المتغيرات x_j تكون مقيدة بالأشارة.
2. جميع القيود والتي عددها m تكون من نوع اقل او يساوي $\leq$.
3. دالة الهدف من نوع الـ Maximum .

وبالامكان وضع أي صيغة للبرمجة الخطية، بالشكل القانوني او العام بأستخدام عمليات التحويل الأولية Elementary Transformation والتي سنستعرضها بشكل مبسط فيما يلي:

1. Minimize Z= Max –Z
2. $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \;\; = to \;\; -a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b$
3. قيد المساواة يحول الى متباينتين متعاكستين بالأتجاة اي احدهما $\geq$ والأخرى $\leq$ ثم تحول الـ $\geq$ الى $\leq$ وذلك بعد ضربها بـ "-1" كما موضح في المثال الأتي:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$
$$= to$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \;\; = to \;\; -a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b$$

4. بالنسبة لقيد المتكون من قيمة مطلقة في الطرف الأيسر منه فيحول الى متباينتين كما هو موضح في المثال الأتي:

$$|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$$
$$= to$$
$$either \quad a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$
$$or \quad -(a_1x_1 + a_2x_2) \leq b$$

ثانياً: الصيغة القياسية The Standard form

تعتبر هذه الصيغة أفضل من السابقة لانها تستخدم في الطريقة العامة المعتمدة في تحليل البرامج الخطية، اي طريقة السمبلكس Simplex Method وأهم خصائص هذه الصيغ مايلي:

1. جميع القيود الواردة في المسألة عبارة عن معاملات ماعدا القيد الخاص بأشارة المتغيرات.

2. عناصر الطرف الأيمن من كل قيد يكون $0 \geq$ اي ان $b_i \geq 0$.

3. جميع المتغيرات تكون أكبر او مساوية للصفر اي انها مقيدة $x_j \geq 0$.

4. دالة الهدف تكون من نوع الـ Maximum او الـ Minimum.

ملاحظة: يتم تحويل قيود المتباينات الى مساواة "معادلات" وذلك بأضافة او بطرح متغيرات وهمية Slack Variable $(s_i \geq 0)$ الى الطرف الأيسر من كل قيد وهذه المتغيرات تضاف للقيود من $\leq$ اصغر اويساوي وتطرح من القيود من نوع اكبراو يساوي $\geq$.

كما موضح في المثال الآتي:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$
$$\rightarrow to$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 - s_1 = b_1$$

حيث $(s_1 \geq 0)$ متغير وهمي لايؤثر على الحل.

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$
$$\rightarrow to$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + s_1 = b_1$$

تلعب الصيغة القياسية دورا مهما في حل مسائل البرمجة الخطية وبصورة عامة اذا كانت لديك مسألة الـ L_p كما يلي:

$$\text{Max} \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad b_i \geq 0$$
$$x_j \geq 0$$

تمثل الصيغة أعلاه بالصيغة القياسية كما يلي:

$$\text{Max} \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$x_j \geq 0$$
$$s_i \geq 0$$

الطريقة العامة لتحليل البرامج الخطية : Simplex Method

تعتبر طريقة السمبلكس طريقة رياضية ذات كفاءة عالية في أيجاد الحلول لمسائل البرمجة الخطية.

لقد طورت هذه الطريقة من قبل عالم الرياضيات الأمريكي جورج دانتبرج عام 1947 وتستنبط هذه الطريقة في مبدأها على الأبتداء بحل معين، كل مايعرف عنه انه مقبول، ثم نستمر بأسلوب تكراري دوري في تطوير هذا الحل الى ان نحصل بعد عدد محدد من الخطوات على الحل الأمثل.

ومن الجدير بالذكر التأكيد على مسألة وجود حل أساسي مقبول ثم أختبار هذا الحل لوصول الى الحل الأمثل.

ان الأسلوب الحسابي لطريقة السمبلكس يتطلب ان يكون هناك على الاغلب m من المتغيرات الموجبة $X_j > 0$ ، حيث m تمثل عدد القيود الواردة في المسألة، في أية مرحلة من المراحل الدورية. فأذا اصبح عدد المتغيرات عند اية مرحلة اقل من عدد القيود عندئذ يكون الحل مفكك Degenerate . وفيما يلي مثالين لبرمجة الخطية:

مثال1:

$$\text{Max} \quad Z = 8x_1 + 6x_2$$

s. to:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 48$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ان الحل الأمثل لمسئلة البرمجة الخطية هذه هو:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 6, \quad Z = 132$$

مثال2:

$$\text{Min} \quad Z = -5x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

s. to:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

ان الحل الأمثل لمسئلة البرمجة الخطية هذه هو:

$$x_1 = \frac{14}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 0, \quad Z = \frac{-73}{3}$$

مثال3:

$$\text{Max} \quad Z = 2x_1 + 3x_3 + 6x_5 + x_7 + 2x_8$$

s. to:

$$2x_1 + 3x_4 + 9x_5 + 8x_7 \le 18$$
$$x_4 + 16x_6 + x_5 + x_8 \le 90$$
$$2x_3 + 11x_4 + 2x_6 + x_2 \le 20$$
$$8x_1 + 20x_3 + 2x_5 + 5x_6 + x_8 \le 50$$
$$9x_2 + 11x_8 - x_7 + 3x_4 \le 40$$
$$9x_7 + 10x_3 + 2x_2 \le 22$$
$$7x_6 - x_5 \le 18$$
$$3x_2 + 8x_3 + 9x_5 - x_7 \le 36$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \ge 0$$

ان الحل الأمثل لمسئلة البرمجة الخطية هذه هو:

$$x_1 = -21.1068, \quad x_2 = -28.4028, \quad x_3 = 8.1484, \quad x_4 = 2.2904, \quad x_5 = 6.1915, \quad x_6 = 3.4559,$$
$$x_7 = -0.2976, \quad x_8 = 26.2233, \quad Z = 71.5296$$

$x_1, x_2 \; and \; x_7$ غير مقيدة بالأشارة

الحلول العددية لمنظومات المعادلات الخطية (4):

Numerical Solution of Linear System

في الحلول العددية لمنظومات المعادلات الخطية، هناك نمطين من الطرق الأول هو نمط الطرق المباشرة Direct Methods ، حيث انه باجراء سلسلة من العمليات الحسابية مرة واحدة، يتم الوصول الى قيمة تقريبية للحل المطلوب، ونقول الحل التقريبي وليس المضبوط لان نتائج العمليات الحسابية تحتوي على بعض الأخطاء التدويرية التي يعتمد مقدارها على عدة عوامل.

النمط الثاني من الطرق العددية هو نمط الطرق التكرارية Iterative Methods وفيها نصل الى الحل المطلوب عن طريق حساب تقريبات متعاقبة له. اي اننا نبدا بحل تقريبي لمنظومة المعادلات، ثم تجري سلسلة من العمليات الحسابية التي تؤدي الى حصولنا على حل تقريبي أفضل، اي اكثر دقة. وهذا بدوره يستعمل مرة اخرى في نفس السلسلة من العمليات لكي ينتج حلا عدديا اخر اكثر دقة وهكذا.

تعتبر الطريقة التكرارية متقاربة Convergentاذا كانت متتالية الحلول المتعاقبة متزايدة في دقتها وتقترب من حد ثابت، وبعكسه تعتبر الطريقة حينئذ متباعدةDivergent.

ومن الجدير بالذكر، انه بالامكان دمج النوعين من الطرق للحصول على حلول أفضل، وذلك باستعمال الطريقة المباشرة أولا لحصول على حل تقريبي بعدد قليل من المراتب العشرية المضبوطة، وهذا بدوره يستعمل في طريقة تكرارية تعطي مراتب عشرية مضبوطة اخرى، وهكذا نحصل على حل اكثر دقة وبمجهود اقل.

وفي ما يلي الصيغة العامة:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Or $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

وفي الطرق التالية سوف نحل أمثلة البرمجة الخطية السابقة "Simplex Method ":

أولا: طريقة الحذف لكاوس Gaussian Elimination Method

من ابسط الطرق المباشرة لحل منظومات المعادلات الخطية هي طريقة الحذف لكاوس، وهي شكل منظم لطريقة الحذف المعروفة في كتب الرياضيات المدرسية.

ثانيا: طريقة كاوس–جوردن Gauss-Jordan Method

ان طريقة كاوس–جوردن لحل منظومة المعادلات AX=B مشابهة الى طريقة الحذف لكاوس ماعدا ان المصفوفة A تختزل الى مصفوفة قطرية في طريقة كاوس–جوردن وليس مصفوفة مثلثية كما في طريقة كاوس.

- نحل نظام البرمجة الخطية Simplex Method في المثال الأول بالطرق العددية وكما يلي النواتج:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 60 \\ 2 & 4 & 48 \end{array}\right]$$

$x_1 = 12, \quad x_2 = 6, \quad Z = 132$

- نحل نظام البرمجة الخطية Simplex Method في المثال الثاني بالطرق العددية وكما يلي النواتج:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 15 \end{array}\right]$$

$x_1 = \frac{14}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 0, \quad Z = \frac{-73}{3}$

- نحل نظام البرمجة الخطية Simplex Method في المثال الثا لث بالطرق العددية وكما يلي النواتج:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 8 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 16 & 0 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 0 & 2 & 0 & 0 & 20 \\ 8 & 0 & 20 & 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 9 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 11 & 40 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 9 & 0 & -1 & 0 & 36 \end{array}\right]$$

$x_1 = -21.1068, \quad x_2 = -28.4028, \quad x_3 = 8.1484, \quad x_4 = 2.2904, \quad x_5 = 6.1915, \quad x_6 = 3.4559,$
$x_7 = -0.2976, \quad x_8 = 26.2233, \quad Z = 71.5296$

يمكن تعميم الطريقة على كل مشاكل البرمجة الخطية ذات الأبعاد $N \times N$ وحسب الصيغة المبينة سابقا، اي ان الحل بطرق الـ (Numerical) هي تعطي نفس النتائج بطريقة Simplex.

الأستنتاجات

1. أن طرق حل المعادلات الخطية تحل فقط البرمجة الخطية التي فيها عدد القيود تساوي عدد المتغيرات.

2. أن طرق حل المعادلات الخطية أسهل وأسرع من طريقة السمبلكس.

3. أن طرق حل المعادلات الخطية لاتحتاج الى متغيرات أضافية (وهمية).

المصادر

1. فردريك أس. هيلير وجيرالد جي ليبرمان، "مقدمة لبحوث العمليات" الجزء الأول لسنة 1987.
2. جابر،عدنان شمخي وضوية سلمان حسن، "مقدمة في بحوث العمليات" كلية الأدارة والأقتصاد/جامعة بغداد لسنة 1988.
3. جذاع، عبد ذياب، "بحوث العمليات" بغداد 1985.
4. الدكتور علي محمد صادق سيفي والدكتورة أبتسام كمال الدين، "مبادئ التحليل العددي" لسنة 1986.