Diala , Jour , Volume , 36 , 2009

تقدير نسبة المعيب ومعدل حجم العينة لخطة معاينة مفردة مبتورة في السيطرة النوعية

م.م بيداء اسماعيل عبد الوهاب
كلية الادارة والاقتصاد
جامعة بغداد

تقدير نسبة المعيب ومعدل حجم العينة لخطة معاينة مفردة مبتورة في السيطرة النوعية

الخلاصة

يتطرق هذا البحث الى تقدير الامكان الاعظم لمعدل نسبة المعيب في المعاينة المفردة المبتورة وكذلك أشتقاق معدل حجم العينة والتباين التقريبي لهذا المقدر ، وتم توضيح ذلك بحالة تطبيقية .

1- المقدمة [2,1]

يشكل اسلوب المعاينة الوسيلة المناسبة في الحصول على تقدير لمدى توفر صفة واحدة او عدة صفات في وحدات الانتاج وذلك عن طريق فحص عينة من الانتاج الكلي ، وهي طريقة جيدة تؤدي الى توفير الوقت والجهد والمال ، وبغية تخفيض كمية الفحص أستخدم أسلوب الفحص المبتور ، كأحد الاساليب المهمة التي اعتمدت في مجال السيطرة على النوعية ، ويعتبر مفهوم المعيب ومعدل حجم العينة (ASN) من الخصائص المهمة التي يجب تقديرها لكي يتسنى المقارنة مع اساليب المعاينة الاخرى كالمعاينة المفردة والمزدوجة والتتابعية وغيرها .

لذلك سوف نركز في بحثنا على تقدير نسبة المعيب في المعاينة المبتورة ، وكذلك اشتقاق معدل حجم العينة . ولا بد من توضيح خطة المعاينة المنفردة وتناول الفحص المبتور .

2- خطة المعاينة المفردة Single Sampling Plan .

نقصد بخطة المعاينة المفردة (n,c) سحب عينة عشوائية من الانتاج او من الدفعة الانتاجية (N) ، ويكون حجم العينة n ، يتم فحصها فاذا كان عدد الوحدات المعيبة فيها c او اقل تقبل العينة ومن ثم تقبل الدفعة المنتجة أما اذا كان عدد الوحدات المعيبة أكبر من c ترفض العينة وترفض الدفعة ويجري فحص شامل للكمية المتبقية (N-n) .

الفحص المبتور [5,3,1]

يعرف الفحص المبتور بانه التدابير الاحتياطية في عملية اخذ النماذج ، لايقاف الفحص في نقطة ما يصبح عندها من الواضح ، أن البيانات المجتمعة لدى الباحث ملائمة لاتخاذ القرار ، وتبدو اهمية الفحص المبتور في حالة التجارب الطبية وفي حالة تلف الوحدات المنتجة عند الفحص ، ويرى هالد (hald) في حالة الفحص المبتور أنه ليس من الضروري فحص جميع وحدات العينة للوصول الى القرار ، فمن الممكن الحصول على نفس القرار في حالة الفحص لجميع مفردات العينة او بتر عملية الفحص في حالة الحصول على (C+1) من الوحدات المعيبة او حال الحصول على (n-c) من الوحدات الجيدة وفي الفحص المبتور يكون عدد الوحدات المفحوصة الضرورية للوصول الى القرار متغيراً عشوائياً (Y) يأخذ القيم من (C+1) الى n او من (K+1)(K+2)….n وتكون الدالة الاحتمالية لـ y هي ثنائي الحدين السالب كما سيوضح ذلك لاحقاً .

وفي الفحص المبتور يتم التوقف عن الفحص عند الحصول على وحدات معيبة يتجاوز عدد القبول او الحصول على وحدات جيدة لا تقل عن (n-c) ، أن الميزة المهمة في هذا النوع من الفحص هو الحصول لعدد

الوحدات التي يتم فحصها ، وهو معدل عدد الوحدات لكل دفعة قبل الوصول الى القرار ويعتمد على P (نسبة الوحدات المعيبة في المنتوج) .

اما التعريف الوارد في معجم مصطلحات السيطرة النوعية (الجابر 1988) فان معدل حجم العينة هو عدد الوحدات التي يلزم سحبها للفحص لغرض الحصول الى قرارالقبول او الرفض عند استخدام خطة معينة لفحص المعاينة ، وبشكل مبسط فانه .
معدل حجم العينة = العدد المتوقع لعدد الوحدات المفحوصة في حالة الرفض + العدد المتوقع لعدد الوحدات المفحوصة في حالة القبول

3- الدالة الاحتمالية .- (5,3)

وقبل الدخول في تفاصيل الاشتقاق لابد من توضيح الرموز الاساسية الواردة في البحث .

الرموز

P : احتمالية اختبار وحدة معيبة في اول محاولة وهذا الاحتمال ثابت من محاولة الى اخرى ، وان هذه المحاولات مستقلة واحدة عن الاخرى .
وعليه يمكن اعتبار P معدل نسبة المعيب في العملية الانتاجية .
k: عدد الوحدات المعيبة الكلي المتراكم والذي يظهر خلال الفحص والذي عندة ترفض او تقبل الدفعة .
K: عدد الوحدات الجيدة المتراكم والذي عندة تقبل الدفعة .
Y: عدد الوحدات الكلي المفحوصة لاجل الوصول الى قرار الرفض او القبول للدفعة ، وهو متغير عشوائي يأخذ القيم k, k+1,……n
وعليه فان

$$n=k+K-1 \qquad \ldots\ldots (1)$$

المفروض ان تنتهي عملية الفحص عند الحصول على k وحدة في الدفعة N .
أن الدالة الاحتمالية للمتغير y هي توزيع ثنائي حدين سالب ذو معملة واحدة p وهي .

$$f(y,p)\begin{cases} f(y\cap R,p)\to y=k,k+1,..K-1 \\ f(y\cap A,p)\to y=K,K+1.....n \end{cases} \qquad \ldots\ldots (2)$$

حيث تشير R (الى مجال الرفض) وتشير A الى مجال القبول .
وحسب هذا التعريف نجد الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y هي .

$$f(y,p)\begin{cases} C_{k-1}^{y-1}p^{k}q^{y-k}\to y=k,k+1,.............K-1 \\ C_{k-1}^{y-1}p^{k}q^{y-k}+C_{K-1}^{y-1}q^{K}p^{y-K} \quad y=K,K+1,..n \\ 0 \qquad\qquad 0/W \end{cases} \qquad \ldots\ldots (3)$$

أن احتمال رفض الدفعة اعتماداً على مجال الرفض هو

$$P(R)=\sum_{y=k}^{n} C_{k-1}^{y-1} p^{k} q^{y-k} \quad \text{......(4)}$$

وهناك علاقة رياضية بين توزيع ثنائي الحدين (Binomial Dist) وتوزيع ثنائي الحدين السالب كما أشار الى ذلك كثير من الباحثين نذكر منهم Patil و Morris والعلاقة هي

$$\sum_{y=z}^{n} C_{z}^{n} p^{z} y^{n-z} = \sum_{y=k}^{n} C_{k-1}^{y-1} p^{k} q^{y-k} \quad \text{......(5)}$$

وطبقاً لهذه العلاقة يكون احتمال رفض الدفعة

$$p(R)=\sum_{y=z}^{n} C_{z}^{n} p^{z} q^{n-z} \quad \text{......(6)}$$

حيث أن z هو متغير عشوائي يمثل عدد المعيب الذي يظهر خلال الفحص عند فحص عينة حجمها n مأخوذة من دفعة حجمها N ، وطبعاً للعلاقة الرياضية (5) يمكن القول أن منحني القبول لخطة المعاينة المفردة . Single Sampling Plan (n,c) ، حيث n حجم العينة و c عدد الوحدات المعيبة المقبول (عدد القبول)، هو متطابق أو متشابة مع منحني القبول لخطة المعاينة المبتورة المفردة المحددة Curtailed Sampling (n , k) وأن n=k+K-1 ، حيث أن عملية البتر تؤدي الى الوصول الى القرار بعد فحص عدد من الوحدات يكون اقل من عدد الوحدات المفحوصة في المعاينة المفردة .

4- تقدير نسبة المعيب في المعاينة المبتورة .

لنفرض أنه تم اخضاع m من الدفعات ذات الحجم N الى الفحص ، طبقاً لاسلوب المعاينة المبتورة ، وجد ان عدد الدفعات المقبولة هو a وعدد الدفعات المرفوضة r .

أي أن $m = a + r$

واثناء عملية الفحص تم تسجيل عدد الوحدات التي تم فحصها من كل دفعة وعدد الوحدات المعيبة التي حصلنا عليها ، طبقاً لعملية التسجيل ستكون بيانات العينة ازواج من القيم

(Z_1,y_1) , (Z_2,y_2) …………(Z_a,y_a) , (k,y_{a+1}) , (k,y_{a+2}) ,…… , (k,y_{a+r})

علماً بأن

Z_i (i=1 , 2,…,a)

هو عدد الوحدات المعيبة الموجوده في الدفعة المقبولة $(Z_i < k)$ ، اما k فهو عدد الوحدات المعيبة الموجوده في الدفعة المرفوضة .

ويمكن وصف العينة بصورة اكثر دقة وهي ان العينة تتكون من ازواج القيم $Z_i<k$ عندما $(Z_i,Y_i);i=1,2,m$ (Z_i , y_i) للدفعات المقبولة ، $(Z_i=k)$ للدفعات المرفوضة .

وباعتماد تعريف دالة الامكان الاعظم لهذة العينة ولتوزيع ثنائي الحدين السالب (المعرف في المعادلة (3) اعلاه ، نجد أن

$$L\,[(Z_1 ,Y_1) , (Z_2,Y_2) \ldots\ldots(Z_m,Y_m)]$$

$$=\prod_{i=1}^{r} C_{k-1}^{y_i-1} p^{k} q^{y_i-k} \prod_{i=1}^{a} C_{K-1}^{y_i-1} q^{K} p^{y_i-K} \quad \text{………………………..(7)}$$

وبأخذ اللوغاريتم للمعادلة (7) :-

$$LnL = \sum_{i=r}^{r} Ln C_{k-1}^{yi-1} + rkLn(p) + \sum_{i=1}^{r}(yi-k)Ln(q) + \sum_{i=1}^{a} Ln C_{K-1}^{yi-1} + aKLn(q) + \sum_{i=1}^{a}(yi-K)Ln(p) \quad \ldots\ldots(8)$$

ثم نشتق بالنسبة لـ P

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)\ \frac{\partial Lnl}{\partial p} = 0 + \frac{rk}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{r}(yi-k)}{(1-p)}(-1) + \frac{aK}{(1-p)}(-1) + \sum_{i=1}^{r}(yi-K)\frac{1}{P}$$

والتي تختصر الى

$$\frac{rk}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{r} yi - rk}{(1-p)} - \frac{aK}{(1-p)} + \frac{\sum_{i=1}^{a} yi - aK}{p}$$

$$= rk + \sum_{i=1}^{a} yi - p\sum_{i=1}^{r} yi - aK - p\sum_{i=1}^{a} yi = 0$$

$$= rk + \sum_{i=1}^{a} yi - p(\sum_{i=1}^{r} yi + \sum_{i=1}^{a} yi) - aK = 0$$

ومنها تجد أن القيمة التقديرية لنسبة المعيب في حالة المعاينة المبتورة هي :

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{a} yi - ak + rk}{\sum_{i=1}^{m} yi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

وتعتبر هذه القيمة التقديرية عن نسبة عدد المعيبات الكلي الموجود الى عدد الوحدات الكلي المفحوصة أضافة لذلك يمكن الحصول على التباين للمقدر () $\hat{p}$ بأستخدام نظرية معلومات فيشر وكالاتي.

$$V(\hat{p}) \approx \frac{1}{-E\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}=\frac{-rk}{p^2}+\frac{(\sum^{r} yi-rk)}{(1-p)^2}(-1)+\frac{aK}{(1-p)^2}(-1)-\frac{(\sum_{i=1}^{r} yi-aK)}{p^2} \qquad \text{.................(12)}$$

لكي نأخذ التوقع للمعادلة (12) لا بد من استخراج توقع المتغير y ، وحسب الخطوات التالية .
ليكن

ASN = E(y)
E(y)=Σy f(y,p)

$$E(y)=\sum_{y=k}^{n} y C_{k-1}^{y-1} P^k q^{y-k}+\sum_{y=K}^{n} y C_{K-1}^{y-1} q^K p^{y-K} \qquad \text{.......................(13)}$$

وبأستخدام المتطابقة المعرفة في المعادلة (5)
وكذلك أستخدام بعض الرموز التي تعبر عن مجموع ثنائي الحدين ، حيث أن

B[p ,n ,k] = pr(x ≤ k)

$$=\sum_{x=0}^{k} C_x^n P^x q^{n-x} \qquad \text{..(14)}$$

ويعتبر الرمز B[p ,n ,k] عن احتمال القبول لعينة عشوائية n مأخوذة من مجتمع يتبع توزيع ثنائي الحدين بالمعلمةP ، وأن هذه العينة تحتوي على معيب أقل أو يساوي K أي أن

Pa = pr(x ≤ k)= B(p ,n , k)

وكذلك تشير الى

$$B(p,n+1,k)=\sum_{x=0}^{k} C_x^{n+1} P^x q^{n+1-x} \qquad \text{...................................(15)}$$

وبتعويض المعادلتين (14) و(15) في المعادلة (13) تكون القيمة المتوقعة للمتغير y هي :

$$E(y)=\frac{k}{p}[1-B(p,n+1,k)]+\frac{K}{p}B[p,n+1,K-1] \qquad \text{..........(16)}$$

طبقاً لهذه المعلومات يمكن تقريب تباين المقدر P الى

$$V(\hat{p})\approx \hat{p}\hat{q}/mE(y)$$

$$V(\hat{p}) \approx \hat{p}\hat{q} / \sum_{i=1}^{m} yi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

حيث $\sum_{i=1}^{m} yi$ العدد الكلي للوحدات المفحوصة

وفي حالة الفحص المتبور فأن الصيغة الرياضية لمعدل حجم العينة ASN هي

$$ASN = npa + E(y / y \leq n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

وحيث أن

$$E(y / y \leq n) = E(y) - E(y / y \geq n+1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(19)$$

وبما أن احتمال القبول Pa يعني احتمال أن يكون عدد الوحدات المعيبة في العينة أقل أو يساوي c فأن

$$Pa = P(y \leq c)$$

$$Pa = \sum_{y=0}^{c} C_{y}^{n} P^{y} q^{n-y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(20)$$

ومن المعلوم أن احتمال الحصول على c أو أقل من الوحدات المعيبة من بين المجموعة الاولى من الوحدات المسحوبة (n) هو يساوي احتمال أيجاد الوحدة المعيبة التي تسلسلها (c+1) عند سحب (n+1) أو اكثر من الوحدات .

وعلية تكون الصيغة البديلة لاحتمال القبول Pa المستخرجة بدلالة ثنائي الحدين ، هي بإستخدام توزيع ثنائي الحدين السالب وكالاتي :-

$$Pa = \sum_{y=n+1}^{\infty} C_{c}^{y-1} P^{c+1} q^{y-c-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(21)$$

ولنفرض أن r=y-n-1 فأن

$$Pa = \frac{p^{c+1} q^{n-c}}{c!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{(n+r-c)!} q^{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

وبعد التعويض عن

$$\frac{(n+r)!}{(n+r-C)!}=\frac{(n+r)(n+r-1).....(n+r-c)!}{(n+r-c)!}$$

$$=(n+r)(n+r-1).....(n+r-c+1)$$

$$=\ (n+r)^{(c)}$$

يكون احتمال القبول هو

$$Pa=\frac{P^{c+1}q^{n-c}}{C!}\sum_{r=0}^{\infty}(n+r)^{(c)}\,q^{r}\ ....(23)$$

وبأستخدام العلاقة الرياضية

$$\sum_{r=0}^{\infty}C_{k}^{r+k}\,q^{r}=(1-q)^{-(k+1)}$$

نحصل على

$$Pa=q^{n-c}\sum_{k=0}^{c}\underset{c-k}{\overset{n-k-1}{C}}\,q^{c-k}$$

$$\because ASN=npa+E(y/y\leq n)$$

وأن

$$E(y/y\leq n)=\frac{C+1}{P}-(C+1)\,q^{n-c}\sum_{k=0}^{c+1}C_{c-k+1}^{c+1}P^{c-k}$$

والتي تختصر الى

$$.............(24)=\frac{C+1}{P}-(C+1)\,C_{c+1}^{n}P^{c}q^{n-c}-\frac{C+1}{P}Pa$$

واخيراً نحصل على القيمة المتوقعة لمعدل حجم العينة

$$ASN=(n-\frac{C+1}{P})Pa+(C+1)[\frac{1}{P}-C_{c+1}^{n}\,p^{c}\,q^{n-c}]\ ....(25)$$

وهي صيغة مبسطة تعتمد على حجم العينة (n) وعدد القبول (c) ونسبة المعيب الثابتة P في الانتاج ، لذلك ينبغي اولاً تحديد معالم خطة المعاينة المفردة (n,c) طبقاً لاي نظام من انظمة الفحص سواء حسب نسبة المعيبات المئوية المسموح بها او حسب الحد الاقصى لنسبة المعيب في المنتوج الخارج من الفحص ، او تحدد معالم خطة المعاينة (n,c) مباشرة من جداول دوج – رومج .

5- حالة تطبيقية

وجد ان نسبة المعيب في انتاج بطارية (بابل 2) هي متغير عشوائي يتغير من دفعة انتاجية الى اخرى ، ويتبع توزيع بيتاً بالمعالم التقديرية ($\hat{\alpha} = 2, \hat{B} = 54$) ، وعلية يكون متوسط المعيب الحقيقية المسموح بها في تقادير المنشأة هي LTPD=5% في حين كانت نسبة المعيب $\bar{p} = \dfrac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + \hat{\beta}} \approx 0.03$.

وطبقاً لهذه المعلومات ولحجم دفعة N=250 وجد ان معالم خطة معاينة المفردة (n,c) الضرورية لفحص الانتاج هي (95,2) .

وتشير هذه الخطة الى سحب عينة عشوائية من المنتوج النهائي مقدارها 95 بطارية وفحصها فاذا كان عدد المعيب فيها هو 2 او اقل تقبل العينة ومن ثم تقبل الدفعة ، اما اذا كان عدد المعيب أكثر من 2 بطارية ترفض العينة ويجري فحص شامل للكمية المتبقية (95-250) بهدف عزل الوحدات الغير جيدة واستبدالها باخرى جيدة ، اضافة لذلك وجد أن معدل حجم العينة للمعاينة المبتورة

ASN=126

وان احتمال القبول عند خطة المعاينة (95,2) هو Pa =0.57038

وان قيمة $\hat{P}$ التقديرية هي $\hat{P} = 0.036$

6- الاستنتاجات

في ضوء ما تقدم نستنتج أن

1 - يعد معدل حجم العينة من المؤشرات المهمة عند تطبيق فحص العينة على المنتوج بدلاً من الفحص الشامل أن استخدام اسلوب الفحص المتبور يؤدي الى تخفيض كمية الفحص ، ويساهم في التوصل الى قرارات خاصة عندما تكون الوحدات المفحوصة سريعه التلف او باهضة الثمن .

2 - كلما ازدادت نسبة المعيب P كلما قلت ASN وتصبح غير ضرورية .

7- التوصيات

1 - ضرورة تطبيق اسلوب علمي في عملية تحديد حجم العينة الامثل وعدد الوحدات المعيبة المقبولة لما له من أهمية في تقليل كلفة عملية الفحص .

2 - نوصي بتحديد حجوم عينات مختلفة أستناداً الى قيم مختلفة لمخاطرة المنتج والمستهلك لانه بذلك يسمح بمراقبة شاملة للمنتوج .

8- المصادر

1 - الجابري ، علي هادي واحمد زيد علي (1988) " معجم مصطلحات السيطرة النوعية" أنكليزي عربي ، وزارة التخطيط الجهاز المركزي للتفتيش والسيطرة النوعية .

2 - القزاز ، اسماعيل ابراهيم وعبدالملك ، عادل (1997) " ضبط الجودة النظرية والتطبية " مكتبة طرابلس العلمية العالمية دار الكتب الوطنية - بنغازي.

3 - عبد الحميد ميسون " بناء نموذج لخطة المعاينة مفردة في السيطرة النوعية مع تطبيق عملي " رسالة ماجستير قسم الاحصاء – جامعة بغداد (2006) .

4- Craig, C.C(1968), The Average Samples Number For Truncated Singleand Double Attributes Acceptance Sampling Plan . Technometrics Vol 10 . No.4

5- Hald, A.(1981) , Statistical Theory Of Sampling Inspection By Attributes. Academic Press INC (London).

Abstract

This research Concerned With Maximum Likelihood estimation Of a process Average Proportion Of detectives for Single Curtailed Sampling Plan . Also the Average Sample Number is derived and asympotatic Variance Of this estimator Was Derived . Finally An Application Case were Explained .