Diala , Jour , Volume , 39 , 2009

استخدام طريقة رونج ــ كوتا "Runge - Kutta" في ايجاد الحل العددي لمنظومة الانتظار (C2 / C1 /2/3)

م.د. داود سلمان رحيم
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المستخلص

يمكن التوصل الى حالة الاستقرار (Steady state) بسهولة عن طريق الحلول التحليلية لانظمة الانتظار (M/M/m/N,M/M/m/1) وذلك عندما يكون التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيني بين زبون واخر واوقات الخدمة لهذة الانظمة هو التوزيع الاسي (Exponential Distribution) ،وان هذه الانظمة هي الشائعة في اغلب كتب صفوف الانتظار ، ولكن عندما يكون التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيني واوقات الخدمة غير اسي (Non-Exponentially) فان الوصول الى حالة الاستقرار عن طريق الحلول التحليلية يكون امراً معقداً مثال ذلك الانظمة(C_k /C_L/m/n ,C_k/C_L/1/N , M/C_L/m/n) وغيرها من الانظمة ، وذلك بسبب كثرة الاطوار التي يمر بها الزبون في كل محطة سواء كانت في مرحلة الوصول او الخدمة.

لذلك في هذا البحث تم استخدام طريقة رياضية (رونج ــ كوتا ذات المرتبة الرابعة) في ايجاد الحل العددي لنموذج الانتظار (C_2/C_1 /2/3) وذلك من خلال ايجاد مصفوفة معدل الانتقال ثم كتابة المعادلات التفاضلية وبالتالي تم اعداد برنامج حاسوبي لحل هذة المعادلات.

نبذة تاريخية.

- تعود البحوث الاولى في مجال صفوف الانتظار الى الباحث الدنماركي ايرلانك (Erlang) عام 1909 اذ وضع نموذجا اوفق لتحقيق الاستفادة من خطوط الهاتف ، وبعدة قام باحثون اخرون بتطوير النظرية فقاموا بوضع معادلات رياضية معينة لحساب طول صف الانتظار وقاموا ايضا بتوضيح اشكال صف الانتظار ، وطريقة تقديم الخدمة في القناة الخدمية ، وقد طبقت النظرية في مجالات عديدة منها صيانة المكائن ، وانتظار المسافرين او انتظار المرضى في المستشفيات .

- في عام 1955 قام كوكس (Cox) بدراسة توزيع احتمالي وقد استنتج بان اي دالة توزيعية تمتلك تحويل لابلاس من الممكن تمثيلها عن طريق سلسلة من الاطوار وان كل طور من هذه الاطوار يتوزع توزيعاً اسياً.

- في عام (1974) نشر هاريس (Harris) كتاب سماه (Fundamentals of theory queueing) بين فيه السلوك الانتقالي للانظمة ($M/E_L/1$) ، ($E_k/M/1$) عن طريق المعادلات الخاصة.

- في عام (1977) تم استخدام الطرق العددية في ايجاد الحل الانتقالي للنظام ($M/E_L/m$) من قبل (Martias)
- في عام (1988) تم استخدام طريقة رونج ـ كوتا في ايجاد الحل العددي للنظام (M/M/m/N) من قبل (Sharma).
- في عام (1996) قام الباحث فرحان اسماعيل باستخدام طريقة (رونج ـ كوتا) في ايجاد الحل العددي للنظام ($E_K/E_L/m/N$).
- في عام (2001) قامت الباحثة (ايمان محمود) بتطوير انموذج رياضي لحل منظومة صف الانتظار متعددة المراحل وذلك من خلال بناء نموذج محاكاة.

- في عام (2005) قام الباحث (داود سلمان) بايجاد الحل التحليلي لنموذج الانتظار($C_2/C_2/2/2/\infty$) ومقارنة ذلك مع الحل العددي باستخدام طريقة (رونج ـ كوتا) واسلوب (Eigen value).

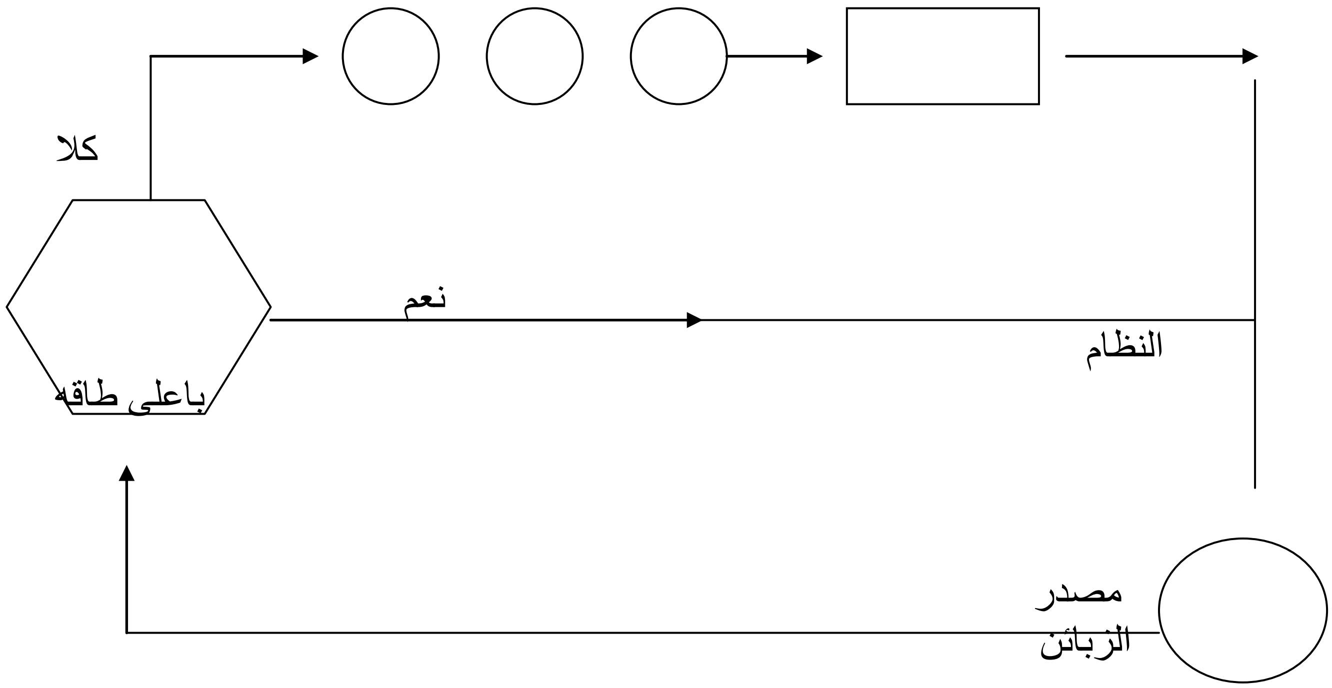
هدف البحث

ايجاد الحل العددي لنموذج الانتظار ($C_2/C_1/2/3$) باستخدام طريقة (رونج ـ كوتا).

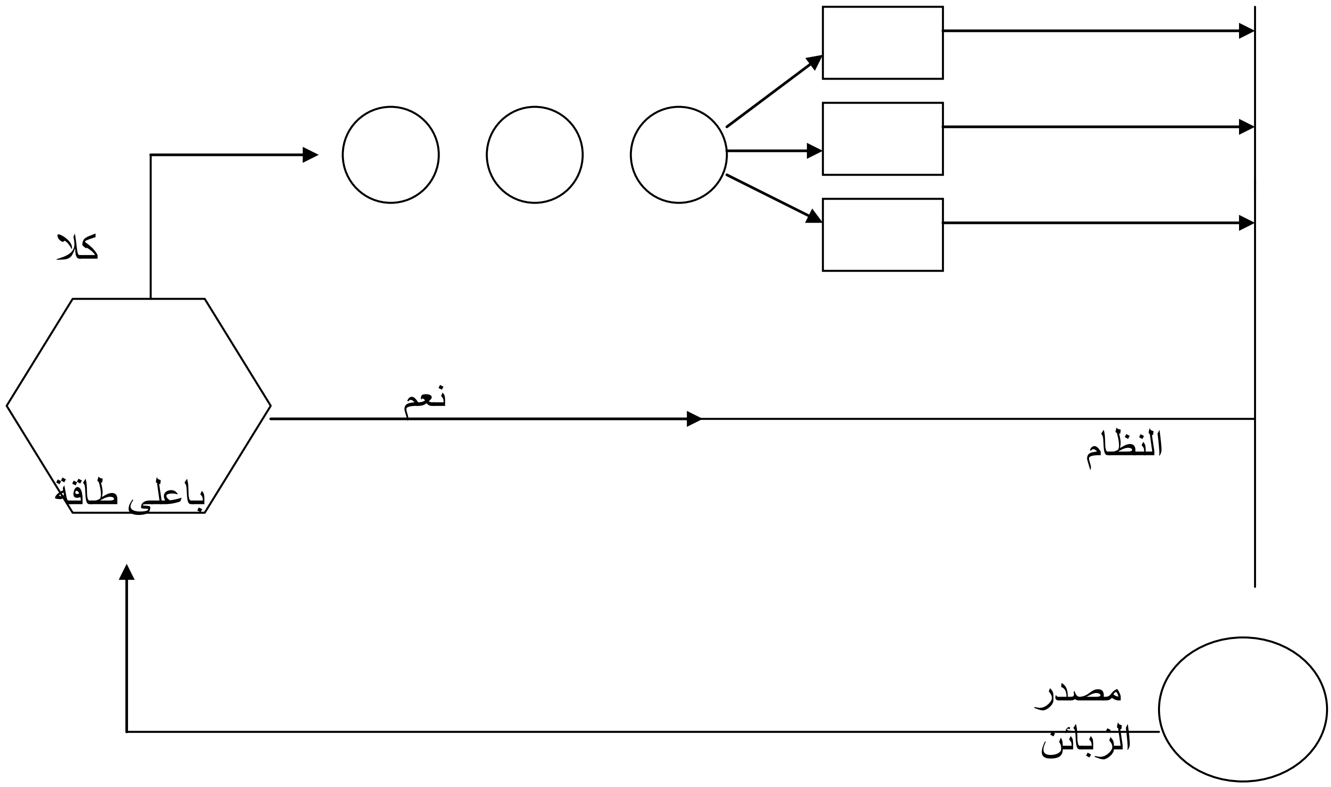
منظومات صفوف الانتظار (1)

- منظومة صفوف الانتظار احادية المرحلة.Single- Stage Queueing System

ان نظام الانتظار احادي المرحلة ينشأ عندما تكون محطة الخدمة ذات مرحلة واحدة اي ان الزبون عندما يدخل الى محطة الخدمة فانة سوف يمر بمرحلة واحدة فقط لخدمتة(Single- Stage) (المخطط 1). ومن الممكن ان يكون لنظام الانتظار محطات خدمة متعددة ولكن ذات مرحلة واحدة اي ان الزبون سيمر بمحطة خدمة واحدة في اثناء خدمتة (المخطط 2).



مخطط (1) منظومة انتظار بمحطة خدمة واحدة ومرحلة واحدة



المخطط (2) منظومة انتظار متعددة قنوات الخدمة وبمرحلة واحدة

- منظومة صفوف الانتظار متعددة المراحل. (Multi – Stage)

ان محطة الخدمة قد تكون متعددة القنوات ومتعددة المراحل بحيث ان الزبون لايستطيع دخول قناة خدمة لاحقة او مرحلة لاحقة مالم يكمل قناة خدمة اومرحلة سابقة ، وهذا يمكن ايضاحة من خلال المخطط (3).

- هناك اختلاف رئيسي مابين نظام الانتظار احادي المرحلة (Single-Stage) ونظام الانتظارمتعددة المراحل (Multi–Stage) ، ففي النظام الاول هناك مصدر واحد فقط للمدخلات (Input) وكذلك مصدر واحد للمخرجات (Output) ومن الممكن ان يكون التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيني مابين الزبائن يتبع التوزيع الاسي. Exponential Distribution او اي توزيع احتمالي اخر ، وليس من الصعوبة معالجة مشاكل صفوف الانتظار تحت نفس هذه الافتراضات.

اما في حالة نظام الانتظار متعدد المراحل فان هناك العديد من المخرجات (Output) ولكل قناة خدمة وبما ان المدخلات لمرحلة لاحقة هي نفسها المخرجات لمرحلة سابقة ، لهذا فان هناك اعتمادية مابين المخرجات لكل مرحلة ، ولنفس هذة الحالة فان توزيع اوقات الوصول البيني مابين الزبائن لكل قناة خدمة لايمكن عده التوزيع الاسي وان توزيع اوقات الخدمة يختلف من محطة الى اخرى لذلك فان مثل هذة الانظمة تكون اكثر تعقيداً.

- **رموز منظومات صفوف الانتظار (2).**

ان الوصف العام للانموذج الرياضي لصفوف الانتظار يبين من خلال الجدول التالي:

الرمز	التفسير
A(t)	التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيني مابين الزبائن
B(t)	التوزيع الاحتمالي لاوقات الخدمة
m	عدد قنوات الخدمة لنظام الانتظار
N	طاقة النظام
p	حجم المجتمع
QD	نوع نظام الخدمة الذي يستخدمة نظام الانتظار

ولتوضيح هذا الشكل بشكل اكثر دقة ناخذ انموذج منظومة الانتظار (A(t)/B(t)/m/N/p/QD) والموصوف بواسطة ستة رموز.

فعندما يكون التوزيع الاحتمالي لمعدل وصول الزبائن يتبع توزيع بواسون (Poisson Distribution) فانة يتم استخدام الرمز (M) بدلا من A(t) في الترميز اعلاه، اما اذا كانت اوقات الوصول البيني مابين الزبائن ثابتة فان التوزيع يكون قطعياً (Deterministic Distribution) ويرمز له بالرمز D ، وكذلك يتم استخدامة بدلا من A(t) في الترميز اعلاه، والجدول التالي بين اهم الرموز الاساسية المستخدمة بكثرة في انظمة صفوف الانتظار.

الصفة المميزة	الرمز	الوصف
Interarrival- Time, Service Time Distribution $A_{(t)}$,$B_{(t)}$	M	Exponential Or Poisson
Interarrival- Time, Service Time Distribution $A_{(t)}$,$B_{(t)}$	D	Deterministic
Interarrival- Time, Service Time Distribution $A_{(t)}$,$B_{(t)}$	E_K , E_L	Erlang E_K , E_L
Interarrival- Time, Service Time Distribution $A_{(t)}$,$B_{(t)}$	C_K , C_L	Coxian C_K , C_L
Interarrival- Time, Service Time Distribution $A_{(t)}$,$B_{(t)}$	G	General
	FCFS	First Come – First Service
	LCFS	Last Come – First Service
	SIRO	Service In Random Order
	PRI	Priority

General Dicipline	GD

ولزيادة التوضيع نورد الامثلة الاتية (3):

- **الانتظار (M / M / 1/ N/∞ / LCFS)**

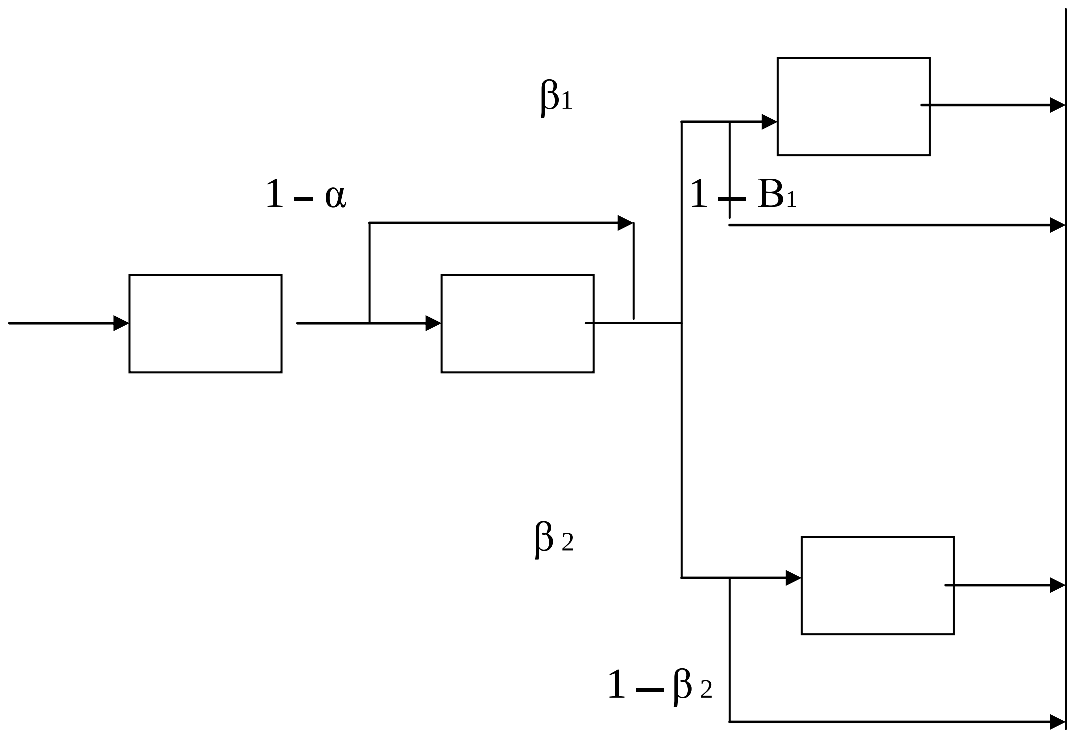
ان نظام الانتظار هذا يبين ان التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيني مابين الزبائن والتوزيع الاحتمالي لاوقات الخدمة يتبعان التوزيع الاسي (Exponential Distribution) ، قناة خدمة واحدة ، طاقة النظام محددة (N) ، طاقة المصدر نهائية ونظام الخدمة من نوع " من ياتي آخرا يخدم اولا " (LCFS).

- **نظام الانتظار (C_K / C_L / m / N/ ∞ /QD)**

يتبع التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيني مابين الزبائن يتبع توزيع كوكسيان (Coxian Distribution) بـ (K) من الاطوار التي يمر بها الزبون في محطة الوصول ، اما توزيع اوقات الخدمة هو كذلك يتبع توزيع كوكسيان ذا (L) من الاطوار التي يمر بها الزبون في محطة الخدمة ، يحتوي النظام على (m) من محطات الخدمة ، طاقة النظام محددة (N) ، طاقة المصدر لانهائية ، واي نوع من انواع نظام الخدمة.

- **نظام الانتظار المستخدم في البحث (C_2 / C_1 /2 /3/ ∞)**

التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيني مابين الزبائن يتبع توزيع كوكسيان بـ (2) من الاطوار التي يمر بها الزبون في محطة الوصول ، اما توزيع اوقات الخدمة هو كذلك توزيع كوكسيان بطور واحد يمر به الزبون في محطة الخدمة ، يحتوي النظام على (2) من محطات الخدمة ، طاقة النظام (3) ، طاقة المصدر لانهائية . (المخطط 4).



المخطط (4) منظومة انتظار النظام (C_2 /C_1 /2/3)

<u>التطبيق</u>

.1 لغرض ايجاد الحل العددي لنظام الانتظار ($C_1 /C_2 /2/3/ \alpha$) علينا ان نجد عدد حالات الانتقال التي يمكن ان يتنقلها النظام (4) :

حيث:

K=2 ، L=1 ، m=2 ، N=3

$$nstate = k\left[\sum_{n=0}^{m} C_{n}^{n+L-1`} + (N-m)C_{m}^{m+L-1}\right]$$

nstate=8

Si	n	C	K
1	0	0	1
2	0	0	2
3	1	1	1
4	1	1	2
5	2	2	1
6	2	2	2
7	3	2	1
8	3	2	2

.2 ايجاد مصفوفة معدل الانتقال (5)

		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
		0:0:1	**0:0:2**	**1:1:1**	**1:1:2**	**2:2:1**	**2:2:2**	**3:2:1**	**3:2:2**
1	0:0:1	$-\lambda$	—	μ	—	—	—	—	—
2	0:0:2	λ	$-\lambda$	—	μ	—	—	—	—
3	1:1:1	—	λ	$-\lambda - \mu$	—	2μ	—	—	—
4	1:1:2	—	—	λ	$-\lambda - \mu$	—	2μ	—	—
5	2:2:1	—	—	—	λ	$-\lambda -2 \mu$	—	2μ	—
6	2:2:2	—	—	—	—	λ	$-\lambda -2 \mu$	—	2μ
7	3:2:1	—	—	—	—	—	λ	$-\lambda -2 \mu$	—
8	3:2:2	—	—	—	—	—	—	λ	-2μ
	$\sum$	0	0	0	0	0	0		0

3. من المصفوفة نكتب المعادلات التفاضلية (6)

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \mu p_3(t)$$
$$p_2'(t) = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) + \mu p_4(t)$$
$$p_3'(t) = \lambda p_2(t) - (\lambda + \mu)\, p_3(t) + 2\mu p_5(t)$$
$$p_4'(t) = \lambda p_3(t) - (\lambda + \mu)\, p_4(t) + 2\mu p_6(t)$$
$$p_5'(t) = \lambda p_4(t) - (\lambda + 2\mu)\, p_5(t) + 2\mu p_7(t)$$
$$p_6'(t) = \lambda p_5(t) - (\lambda + 2\mu)\, p_6(t) + 2\mu p_8(t)$$
$$p_7'(t) = \lambda p_6(t) - (\lambda + 2\mu)\, p_7(t)$$
$$p_8'(t) = \lambda p_7(t) - 2\mu p_8(t)$$

4. وبالاعتماد على طريقة Runge – Kutta (ذات المرتبة الرابعة) ومن خلال صيغتها الرياضية التالية (7):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

5. تم اعداد برنامج حاسوبي من قبل الباحث وهذا البرنامج يصلح لحل كافة المعادلات التفاضلية الناتجة عن حالات الانتقال التي يسلكها اي نظام من انظمة صفوف الانتظار.

الاستنتاجات

1. يمكن الوصول الى حالة الاستقرار (steady state) بسهولة عن طريق الحلول التحليلية لبعض انظمة الانتظار سيما تلك التي يكون فيها توزيع وقت الوصول او وقت الخدمة (التوزيع الاسي) .

Exponential Distribution

ولكن عندما يكون التوزيع الاحتمالي غير اسي فان الوصول الى حالة الاستقرار عن طريق الحلول التحليلية يكون امرا معقداً.

2. يمكن استخدام (طريقة رونج ــ كوتا) في حل انظمة الانتظار التي تتوزع توزيعاً اخراً (غير اسياً).

3. ان استخدام طريقة (رونج ــ كوتا) يتطلب ايجاد عدد حالات الانتقال للنظام وايجاد مصفوفة معدل الانتقال وبالتالي المعادلات التفاضلية .

4. البرنامج المعد من قبل الباحث يمكن استخدامه في ايجاد الحل العددي للانظمة المعقدة في صفوف الانتظار.

التوصيات

1. يمكن استخدام هذا الاسلوب في ايجاد الحل العددي لكافة انظمة الانتظار.
2. في البحوث القادمة يمكن اجراء مقارنة مابين الحل العددي باستخدام رونج ـــ كوتا مع الحل التحليلي باستخدام اساليب الرياضيات الاخرى. سيما تلك البحوث الذي تتطلب دقة عالية في النتائج كالبحوث الطبية والذرية وغيرها.

" البرنامج"

```
Const lamda = : const mu =
Dim K1 As Double , K2 As Double , K3 As Double ,K4 As
Double
Private Sub Command1_ Click ( )
h =0: dh=0.00001
Dim p(9.100) As Double
Dim x As string
P(1.0)=1
For i=2 to 9:p(i ,0)=0: Next  i
For j=1 to 100
H=hdh
CIS
Sum=0
For i=1  to  9
Select   case  i
    Case  1
P(i,j) = - lamda * p(1,j-1)+mu   *p(3,j-1)
   Case  2
P(i ,j)=lamda  *p(1,j-1) – lamda  *p(2,j – 1)+mu * p(4,j- 1)
   Case 3
P(i ,j)=lamda *p (2,j -1) – (lamda + mu) *p (3,j -1) +2 *mu*p
(5,j -1)
   Case  4
```

```
P(i ,j)= lamda *p (3,j – 1) – (lamda +mu) *p (4,j -1) +2  *mu
*p(6, j- 1)
   Case  5
P(i,j)=lamda *p (4,j -1) – ( lamda +2*mu ) *p(5,j -1) +2*mu
*p(7,j- 1)
   Case  6
P(i ,j) = lamda *p(5,j -1) – ( lamda +2 *mu) *p(6 ,j -1) +2*mu
*p (8,j -1)
   Case 7
P(i ,j)= lamda *p (6,j -1) – (lamda + 2*mu) *p (7, j -1)
   Case   8
P (i ,j) = lamda *p (7, j -1) – 2*mu *p (8 , j-1)
End select
K1=h*p(i ,j )
K2=h*(p(i , j)+(K1/2))
K3=h*(p(i , j)+(K2/2))
K4=h*(p(i , j)+ K3)
P(i , j)=p(i,j-1)+(1/6)*(K1+2*(K2+K3)+K4)

Next i
For i=1 to 9
Sum=sum +p(i , j)
Next i
Next j
Text2.Text= str (sum)
J=100
Dim pp=(100) As double, pp1 As string
For j=99 to 100
pp(0)=p(i , j)
pp1="p(0) +" str (pp(0))+chr (13)+chr (10)
1=0
For i=1 to 21
X=x+"p("+str (i)+","+str(j)+")="+str (p(i,j))
X=x+chr(13)+chr(10)
Text1.Text=x
If i=1 then go to 50
K=K+1
Sum1=sum1+p(i , j)
If k=3 Then
i=i+1
pp(1)=sum1
```

```
pp1=pp1+"p("+str (1)+")="+str(pp(1))
pp1=pp1+chr(13)+chr(10)
k=0 : sum1=0
End if
50
Next i
Next j
Text3.text=pp1
End sub
```

Foreign References

1. Kleinrock, Leonard (1976) "Queueing Systems" , Vol.1 John Wiley&Sons,Inc.

2. Taha ,Hamdy A.(1997) 'Operations Research An Intoduction " , (16 th edition) , Prentice – Hall . Inc .Simon &Schuster Ariacom Compony.

3. Gross ,D.& Harris, (1974) , "Fundomentals Of Queueing ,New York. Theory "

4. Dakheel ,F.I (1990) "Adecision Sujport System For Single Markovian Queueing System ',ph.D. Thesis Stage ,University Of BRAD FORD.

5. Dakheel , F ,I (1996) , " An Approach For Determing The Analytical Solution The machine Interance model (E_K /E_L /m/ n)" College Of Education , Al – Mustansiriayah University.

6. Naseer .R-Al- Heety , Mutaz .E, (1997) "Generating The Transition Rate Matrix For Coxian Queueing Model University Rafidain College , Department Of Operations Research.

7. Curtis F.Gerald (2004) , "Applied Numerical Analysis " , (7TH edition) , prentice – Hall . Inc . Simon & Schuster Aviacom Comjany.